1.12 Ordres moyens de l'indicatrice d'Euler et des fonctions σ et τ (223, 224, 230) [32]

En théorie des nombres, on appelle ordre moyen d'une fonction $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ toute fonction $g : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que :

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) \underset{x \to +\infty}{\sim} \sum_{n \leqslant x} g(n).$$

On cherche alors à avoir une estimation simple de la "fonction sommatoire de f", donc, en trouvant un ordre moyen le plus simple possible. Le théorème des nombres premiers est d'ailleurs équivalent au fait que la fonction Λ de von Mangoldt a comme ordre moyen la fonction constante égale à 1. Cette fonction étant définie ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Lambda(n) = \begin{cases} \ln(p) & \text{si} \quad n = p^k \text{ pour un certain nombre premier } p \text{ et un entier } k \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On va, dans ce développement, déterminer quelques ordres moyens de fonctions arithmétiques simples.

Théorème 1.24. On a les ordres moyens suivants :

1. Soit σ la fonction somme des diviseurs :

$$\sigma : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \displaystyle\sum_{d \mid n} d. \end{array}$$

Alors σ a pour ordre moyen la fonction $n \mapsto \frac{\pi^2}{6} n$. Plus précisément :

$$\sum_{n \leqslant x} \sigma(n) = \frac{\pi^2}{12} x^2 + \underset{x \to +\infty}{O} \left(x \ln(x) \right).$$

2. L'indicatrice d'Euler φ a pour ordre moyen la fonction $n \mapsto \frac{6}{\pi^2} n$. Plus précisément :

$$\sum_{n \leqslant x} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2} x^2 + \underset{x \to +\infty}{O} \left(x \ln(x) \right).$$

3. (Si le temps) La fonction nombre de diviseurs :

$$\tau : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \displaystyle\sum_{d \mid n} 1 \end{array}$$

a pour ordre moyen la fonction $n \mapsto \ln(n)$, mais on a plus précisément :

$$\sum_{n \leqslant x} \tau(n) = x \left(\ln(x) + 2\gamma - 1 \right) + \underset{x \to +\infty}{O}(\sqrt{x}),$$

où γ désigne la constante d'Euler-Mascheroni.

Démonstration. Dans les démonstrations, on fera usage de plusieurs outils "classiques" en théorie des nombres : la convolution arithmétique, l'inversion de Möbius et l'interversion de sommation.

1. Pour $x \geqslant 1$, on a :

$$\sum_{n \leqslant x} \sigma(n) = \sum_{n \leqslant x} \sum_{d \mid n} d = \sum_{\substack{m,d \in \mathbb{N}^* \\ md \leqslant x}} d = \sum_{d \leqslant x} \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{x}{d} \rfloor} m = \sum_{d \leqslant x} \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor + 1 \right).$$

À partir de là, on utilise le fait suivant :

$$\left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor = \frac{x}{d} + \underset{x \to +\infty}{O}(1)$$

pour en déduire :

$$\sum_{n \leqslant x} \sigma(n) = \frac{1}{2} \sum_{d \leqslant x} \frac{x^2}{d^2} + \underset{x \to +\infty}{O} \left(x \sum_{d \leqslant x} \frac{1}{d} \right) = \frac{\pi^2}{12} x^2 + \underset{x \to +\infty}{O} (x \ln(x)).$$

2. Pour l'indicatrice d'Euler, on fait de même, en utilisant la formule d'inversion de Möbius : étant donné que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n = \sum_{d \mid n} \varphi(d),$$

on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi(n) = \sum_{d \mid n} \mu(d) \frac{n}{d}.$$

Ainsi :

$$\sum_{n \leqslant x} \varphi(n) = \sum_{n \leqslant x} \sum_{d \mid n} \mu(d) \frac{n}{d} = \sum_{\substack{m,d \in \mathbb{N}^* \\ md \leqslant x}} \mu(d) m = \sum_{d \leqslant x} \frac{\mu(d)}{2} \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor + 1 \right) = \frac{x^2}{2} \sum_{d \leqslant x} \frac{\mu(d)}{d^2} + \underset{x \to +\infty}{O} \left(x \sum_{d \leqslant x} \frac{1}{d} \right).$$

Maintenant, on utilise un fait général sur les séries de Dirichlet :

Proposition 1.25 (Produit des séries de Dirichlet)**.** Soient $f, g \in \mathscr{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{C})$ deux fonctions de série de Dirichlet associées D_f et D_g, absolument convergentes sur un demi-plan $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > \sigma_c\}$ avec $\sigma_c \in \mathbb{R}$. Alors la série de Dirichlet D_{f*g} est convergente sur ce demi-plan et on a :

$$D_{f*g} = D_f \times D_g,$$

c'est-à-dire :

$$\forall s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > \sigma_c, \quad \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s} \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{g(n)}{n^s} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \left(\sum_{d \mid n} f(d) g\left(\frac{n}{d} \right) \right)$$

Démonstration. Étant donné que D_f et D_g sont absolument convergentes sur le demi-plan $\mathbb{H}_{\sigma_c} := \{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > \sigma_c\}$, la famille :

$$\left(\frac{f(n)g(m)}{(nm)^s} \right)_{(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2}$$

est sommable pour tout $s \in \mathbb{H}_{\sigma_c}$ et on peut donc effectuer une sommation par paquets à produit constant, c'est-à-dire qu'on partitionne $(\mathbb{N}^*)^2$ ainsi :

$$(\mathbb{N}^*)^2 = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty} \left\{ (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2 \quad | \; nm = k \right\},$$

de sorte que :

$$\forall s \in \mathbb{H}_{\sigma_c}, \quad D_f(s) D_g(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{\substack{n,m \in \mathbb{N}^* \\ nm=k}} \frac{f(n)g(m)}{(nm)^s} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} \sum_{\substack{n,m \in \mathbb{N}^* \\ nm=k}} f(n)g(m) = D_{f*g}(s).$$

$\square$

Maintenant, étant donné que la fonction de Möbius est l'inverse pour la convolution arithmétique de la fonction constante égale à 1, on a :

$$\forall s \in \mathbb{H}_1, \quad D_\mu(s) D_1(s) = D_\mu(s)\zeta(s) = 1.$$

Ainsi, en particulier :

$$\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}.$$

Ainsi :

$$\sum_{n \leqslant x} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2} x^2 + \underset{x \to +\infty}{O}(x \ln(x)).$$

3. Pour la fonction τ, on va utiliser le fait qu'elle s'écrit $1 * 1$ et utiliser le principe de l'hyperbole de Dirichlet :

Proposition 1.26 (Principe de l'hyperbole de Dirichlet)**.** Soient $f, g \in \mathscr{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{C})$ deux fonctions. On note, pour $x \in [1, +\infty)$:

$$F(x) := \sum_{n \leqslant x} f(n), \quad \text{et} \quad G(x) := \sum_{n \leqslant x} g(n).$$

Alors on a, pour tout $x \in [1, +\infty)$ et pour tout $y \in [1, x]$:

$$\sum_{n \leqslant x} f * g(n) = \sum_{n \leqslant y} g(n) F\left(\frac{x}{n}\right) + \sum_{m \leqslant \frac{x}{y}} f(m) G\left(\frac{x}{m}\right) - F\left(\frac{x}{y}\right) G(y)$$

Démonstration. On réécrit le membre de gauche de cette égalité ainsi :

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leqslant x} f * g(n) &= \sum_{\substack{m,d \in \mathbb{N}^* \\ md \leqslant x}} f(m) g(d) \\
&= \sum_{\substack{m,d \in \mathbb{N}^* \\ md \leqslant x, d \leqslant y}} f(m) g(d) + \sum_{\substack{m,d \in \mathbb{N}^* \\ md \leqslant x, d > y}} f(m) g(d) \\
&= \sum_{d \leqslant y} g(d) F\left(\frac{x}{d}\right) + \sum_{m \leqslant \frac{x}{y}} \left(f(m) \sum_{y < d \leqslant \frac{x}{m}} g(d) \right) \\
&= \sum_{d \leqslant y} g(d) F\left(\frac{x}{d}\right) + \sum_{m \leqslant \frac{x}{y}} f(m) \left(G\left(\frac{x}{m}\right) - G(y) \right) \\
&= \sum_{d \leqslant y} g(d) F\left(\frac{x}{d}\right) + \sum_{m \leqslant \frac{x}{y}} f(m) G\left(\frac{x}{m}\right) - F\left(\frac{x}{y}\right) G(y).
\end{aligned}$$

$\square$

On applique ce principe pour $f = g = 1$, ce qui donne $F = G = \lfloor \cdot \rfloor$ et $y = \sqrt{x}$ pour obtenir :

$$\sum_{n \leqslant x} \tau(n) = \sum_{n \leqslant \sqrt{x}} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor + \sum_{m \leqslant \sqrt{x}} \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor - \left(\lfloor \sqrt{x} \rfloor\right)^2 = 2 \sum_{n \leqslant \sqrt{x}} \frac{x}{n} - x + \underset{x \to +\infty}{O}\left(\sqrt{x}\right).$$

En appliquant le fameux développement asymptotique de la série harmonique :

$$\sum_{n \leqslant \sqrt{x}} \frac{1}{n} = \ln\left(\sqrt{x}\right) + \gamma + \underset{x \to +\infty}{O}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right),$$

on obtient :

$$\sum_{n \leqslant x} \tau(n) = x\left(2\ln\left(\sqrt{x}\right) + 2\gamma + \underset{x \to +\infty}{O}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) - 1\right) + \underset{x \to +\infty}{O}\left(\sqrt{x}\right) = x\left(\ln(x) + 2\gamma - 1\right) + \underset{x \to +\infty}{O}\left(\sqrt{x}\right),$$

ce qui conclut ce développement !

□

Remarque 1.12.1 (Beaucoup de choses ont été utilisées dans ce développement !)**.** *Au moins trois résultats ont été utilisé et c'est presque sûr que le jury vous demandera des détails dessus :*

1. *La formule d'inversion de Möbius,*
2. *le développement asymptotique de la série harmonique,*
3. *ce "principe de l'hyperbole de Dirichlet",*
4. *le calcul de $\zeta(2)$.*

1. *Pour la formule d'inversion de Möbius, rappelons sa définition et montrons qu'il s'agit bien de l'inverse de la fonction constante égale à 1. On a :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mu(n) = \begin{cases} (-1)^k & \textit{si } n \textit{ s'écrit comme produit de } k \textit{ nombres premiers distincts,} \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

On prend la convention que 1 s'écrit comme produit de 0 nombres premiers distincts, de sorte que $\mu(1) = 1$. Étant donné que $\mu(n) = 0$ si n possède un facteur carré, il suffira de montrer :

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = 0$$

pour $n \geqslant 2$ sans facteurs carrés. En effet, si n s'écrit :

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i},$$

alors, en notant $r(n) := \prod_{i=1}^{k} p_i$, on a :

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = \sum_{d \mid r(n)} \mu(d) + \sum_{\substack{d \mid n \\ d \nmid r(n)}} \mu(d).$$

Or, les entiers d divisant n mais ne diviant pas $r(n)$ sont les entiers possédant un facteur carré dans leur décomposition en produit de nombres premiers. Ainsi, tous les termes de la deuxième somme sont nuls, de *sorte que :*

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = \sum_{d \mid r(n)} \mu(d).$$

Supposons donc que n s'écrive $\prod_{i=1}^{k} p_i$, avec $k \geqslant 1$. Les entiers d divisant n sont alors les entiers de la forme :

$$d = \prod_{i \in I} p_i$$

pour I parcourant les sous-ensembles de $[\![1,k]\!]$ (Là encore, 1 étant réalisé pour $I = \emptyset$). Ainsi, on a :

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = \sum_{I \subset [\![1,k]\!]} \mu\left(\prod_{i \in I} p_i\right) = \sum_{\ell=0}^{k} \sum_{\substack{I \subset [\![1,k]\!] \\ |I|=\ell}} \mu\left(\prod_{i \in I} p_i\right) = \sum_{\ell=0}^{k} \sum_{\substack{I \subset [\![1,k]\!] \\ |I|=\ell}} (-1)^{\ell} = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} (-1)^{\ell} = (1-1)^k = 0.$$

2. *Pour le développement de la série harmonique, on effectue des comparaisons série-intégrale :*

$$\forall n \geqslant 2, \qquad \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Ainsi, la suite des sommes partielles :

$$\sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x}\right) = H_N - 1 - \ln(N+1) + \ln(2)$$

est croissante comme somme partielle d'une série à termes positifs, majorée par :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x}\right) = \lim_{N \to +\infty} (\ln(N) - \ln(N+1) + \ln(2)) = \ln(2),$$

donc converge, vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Ainsi, on a :

$$\lim_{N \to +\infty} (H_N - \ln(N)) = \ell + 1 - \ln(2),$$

étant donné que $\ln(N+1) = \ln(N) + \underset{N \to +\infty}{O}\left(\frac{1}{N}\right)$. On appelle constante d'Euler-Mascheroni, notée γ, la limite $\ell + 1 - \ln(2)$. Jusqu'ici, on a donc :

$$H_N = \ln(N) + \gamma + \underset{N \to +\infty}{o}(1).$$

Pour pousser plus loin le développement asymptotique, il faut analyser le terme de reste. Faisons-le :

$$\begin{aligned} H_N - \ln(N) - \gamma &= \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x}\right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x}\right) + \ln(N+1) - \ln(N) \\ &= -\sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right). \end{aligned}$$

Or, pour $n \to +\infty$, on a :

$$\frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Étant donné que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ *converge et est à termes positifs, on a par sommation des relations de comparaisons :*

$$H_N - \ln(N) - \gamma = -\frac{1}{2}\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} + \underset{N\to+\infty}{o}\left(\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{N} + \underset{N\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

En comparant $\frac{1}{n^2}$ *à* $\frac{1}{n(n+1)}$ *pour* n *tendant vers* $+\infty$*, on obtient :*

$$H_N - \ln(N) - \gamma = -\frac{1}{2N} + \underset{N\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{N}\right) + \frac{1}{N} = \frac{1}{2N} + \underset{N\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{N}\right).$$

3. *Concernant le principe de l'hyperbole de Dirichlet, une jolie illustration est trouvable dans [32]. Ce principe est également utilisé pour prouver ce que j'ai dit au début du développement, à savoir que le théorème des nombres premiers est équivalent au fait que la fonction* Λ *de von Mangoldt a pour ordre moyen* 1.
4. *Le calcul de* $\zeta(2)$ *est un classique et vous devez être capable de donner des éléments de réponse quant à la manière de le mener à bien. Une preuve rapide est l'utilisation des séries de Fourier : posons* $g \in \mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R})$ *telle que* $g(x) = |x|$ *pour* $x \in [-\pi, \pi]$*. On a :*

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|e^{-inx}\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos(nx)\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } n = 0, \\ \dfrac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a donc que la série de Fourier de g *converge normalement, sa limite est donc forcément* g*. Ainsi :*

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{p\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2p+1)^2}e^{i(2p+1)x} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}.$$

En évaluant en 0*, on obtient :*

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2},$$

et donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Il ne reste plus qu'à dire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8}.$$

Ainsi :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}\ !$$